

## Równania i nierówności trygonometryczne

### Zad. 1

Rozwiąż równania dla  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ :

- |   |                                   |   |                                |
|---|-----------------------------------|---|--------------------------------|
| a) $\sin x = \frac{1}{2}$                     | b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  | c) $\sin x = 1$                                 | d) $\sin x = 3$                |
| e) $\sin x = 0$                               | f) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | g) $\sin x = -1$                                | h) $\sin x = -0,8$             |
| i) $\cos x = \frac{1}{2}$                     | j) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  | k) $\cos x = 1$                                 | l) $\cos x = 0,4$              |
| m) $\cos x = 0$                               | n) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | o) $\cos x = -1$                                | p) $\cos x = -2$               |
| r) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | s) $\operatorname{tg} x = 1$      | t) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$             | u) $\operatorname{tg} x = 0$   |
| w) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$          | y) $\operatorname{tg} x = -2$     | z) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  | a) $\operatorname{ctg} x = 1$  |
| b) $\operatorname{ctg} x = 3$                 | c) $\operatorname{ctg} x = 0$     | d) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | e) $\operatorname{ctg} x = -1$ |
| f) $\sin x = -\frac{1}{2}$                    |                                   |   |                                |

### Zad. 2

Rozwiąż równania:

- |                                      |                                       |   |  |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|--|
| a) $\sin x = \frac{1}{2}$            | b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$     | c) $\sin x = 0$   | d) $\sin x = 1$  |
| e) $\cos x = \frac{1}{2}$            | f) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$     | g) $\cos x = 0$   | h) $\cos x = -1$   |
| i) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  | j) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$  | k) $\operatorname{tg} x = 0$  | l) $\operatorname{tg} x = -1$  |
| m) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ | n) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ | o) $\operatorname{ctg} x = 0$   | p) $\operatorname{ctg} x = -1$                                       |
| r) $\sin 3x = 0$                     | s) $\cos 7x = -1$                     | t) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$  | u) $\operatorname{ctg} \frac{1}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$           |
| w) $\sin(2x - \pi) = \frac{1}{2}$    | y) $\cos(\pi - x) = 1$                | z) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}x + 3\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | a) $\operatorname{ctg} \left(\frac{x-2\pi}{3}\right) = 0$            |
| b) $2 \sin x = \sqrt{2}$             | c) $\sqrt{2} \cos 3x = -1$            | d) $4 \operatorname{tg}(\pi - 2x) = 0$  | e) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2}x - \pi\right) = 3$ |

### Zad. 3

Rozwiąż równania:

- |                                    |                                |   |
|------------------------------------|--------------------------------|---|
| a) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$   | b) $\sin x + \cos^2 x + 1 = 0$ | c) $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$                             |
| d) $2 \cos^2 x + 9 \cos x + 4 = 0$ | e) $\cos x - \cos 2x = 1$      | f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4 \sin 2x$ |

**Zad. 4**

Rozwiąż nierówności:

a)  $\sin x > \frac{1}{2}$

b)  $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\sin x \leq 0$

d)  $\sin x < 1$

e)  $\cos x \leq \frac{1}{2}$

f)  $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g)  $\cos x > 0$

h)  $\cos x \geq -1$

i)  $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

j)  $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$

k)  $\operatorname{tg} x < 0$

l)  $\operatorname{tg} x \leq -1$

m)  $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$

n)  $\operatorname{ctg} x \geq -\sqrt{3}$

o)  $\operatorname{ctg} x > 0$

p)  $\operatorname{ctg} x \leq -1$

**Zad. 5**Rozwiąż nierówności: a)  $\sin^2 x < \frac{1}{2}$  b)  $\sin^2 x - \sin x \geq 0$  c)  $\cos^2 x < 1$ **Zad. 6**Rozwiąż równania i nierówności: a)  $|\sin x| = \frac{1}{2}$  b)  $|\cos x| = 1$  c)  $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$  d)  $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ **Zad. 7**Rozwiąż równanie  $2 \sin 2x + \operatorname{ctg} x = 4 \cos x$  dla  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Ze zbioru rozwiązań tego losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że co najmniej jedno z wylosowanych rozwiązań jest wielokrotnością liczby  $\frac{\pi}{2}$ .**Zad. 8**Dane jest równanie  $\sin x = a^2 + 1$ , z niewiadomą  $x$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ , dla których dane równanie nie ma rozwiązań.**Zad. 9**Rozwiąż równania i nierówności w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

a)  $-2 \sin 3x \geq 1$

b)  $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$

c)  $\sin^2 2x - 4 \sin^2 x + 1 = 0$

d)  $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

e)  $2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$

f)  $2 \operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1 = 2 \cos x + \operatorname{tg} x$

**Zad. 10**Rozwiąż równanie  $\cos x + \cos 2x = 0$  dla  $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ .**Zad. 11**Rozwiąż równanie  $\cos 2x + 2 = 3 \cos x$ .**Zad. 12**Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste  $x$ , spełniające równanie  $\sin 5x - \sin x = 0$ .**Zad. 13**Rozwiąż równanie:  $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$

**Zad. 14**

Dane jest równanie postaci  $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$ , gdzie  $p \in \mathbf{R}$  jest parametrem.

- a) Dla  $p = -1$  wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału  $\langle 0; 5 \rangle$ .
- b) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których dane równanie ma w przedziale  $\langle -\pi, \pi \rangle$  trzy różne rozwiązania.

**Zad. 15**

Rozwiąż równanie  $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$ .

## Odpowiedzi

### Zad. 1

- a)  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$  b)  $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  c)  $\frac{\pi}{2}$  d) 1 e)  $0, \pi, 2\pi$  f)  $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  g)  $\frac{3\pi}{2}$  h) 4,07 rad; 5,35 rad i)  $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  j)  $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$   
k)  $0, 2\pi$  l) 1,15 rad; 5,13 rad m)  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  n)  $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$  o)  $\pi$  p)  $-1$  r)  $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  s)  $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  t)  $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$   
u)  $0, \pi, 2\pi$  w)  $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  y) 2,03 rad; 5,17 rad z)  $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  a)  $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  b) 0,32 rad; 3,46 rad c)  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$   
d)  $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  e)  $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  f)  $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

### Zad. 2

- a)  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  b)  $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  c)  $k\pi, k \in \mathbf{C}$  d)  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$   
e)  $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  f)  $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  g)  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  h)  $\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$   
i)  $\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  j)  $-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  k)  $k\pi, k \in \mathbf{C}$  l)  $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  m)  $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  n)  $\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{C}$   
o)  $\frac{5\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  p)  $\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  r)  $\frac{1}{3}k\pi, k \in \mathbf{C}$  s)  $\frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi, k \in \mathbf{C}$  t)  $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{C}$   
u)  $\frac{8\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{C}$  w)  $\frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  y)  $\pi - 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  z)  $-6\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$   
a)  $3\frac{1}{2}\pi + 3k\pi, k \in \mathbf{C}$  b)  $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  c)  $-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{C}$  d)  $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{C}$   
e)  $2\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$

### Zad. 3

- a)  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  b)  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  c)  $\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  d)  $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  e)  $\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$  f)  $-\frac{3\pi}{8} + k\pi, -\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{C}$

### Zad. 4

- a)  $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbf{C}$  b)  $\langle \pi + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \rangle \cup \langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$   
c)  $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$  d)  $\mathbf{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \}, k \in \mathbf{C}$  e)  $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rangle \cup \langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$  f)  $\langle \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$  g)  $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$   
h)  $\mathbf{R}$  i)  $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbf{C}$  j)  $\langle -\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$  k)  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi), k \in \mathbf{C}$   
l)  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbf{C}$  m)  $\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \pi + k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$  n)  $(k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi), k \in \mathbf{C}$  o)  $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbf{C}$  p)  $\langle \frac{3\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$

### Zad. 5

- a)  $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbf{C}$  b)  $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$  c)  $\mathbf{R} \setminus \{k\pi\}$

### Zad. 6

- a)  $\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{C}$  b)  $k\pi, k \in \mathbf{C}$  c)  $\langle -\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$  d)  $\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \rangle, k \in \mathbf{C}$

### Zad. 7      Zad. 8

- $\frac{5}{6}$        $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

### Zad. 9

- a)  $\langle \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18} \rangle, (\frac{19\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}), \langle \frac{31\pi}{18}, \frac{35\pi}{18} \rangle$  b)  $\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2}\pi$  c)  $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi$  d)  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$   
e)  $0, 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  f)  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}$

**Zad. 10**

$$-\pi, \pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

**Zad. 11**

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi, k \in \mathbf{C}$$

**Zad. 12**

$$\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{C}$$

**Zad. 13**

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C}$$

**Zad. 14**

a)  $0, \frac{\pi}{2}, 1, 5\pi$    b)  $p \in (-2, 0)$

**Zad. 15**

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$$