

Równania i nierówności trygonometryczne

Zad. 1

Rozwiąż równania dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$:

- | | | | |
|---|-----------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| a) $\sin x = \frac{1}{2}$ | b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | c) $\sin x = 1$ | d) $\sin x = 3$ |
| e) $\sin x = 0$ | f) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | g) $\sin x = -1$ | h) $\sin x = -0,8$ |
| i) $\cos x = \frac{1}{2}$ | j) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | k) $\cos x = 1$ | l) $\cos x = 0,4$ |
| m) $\cos x = 0$ | n) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | o) $\cos x = -1$ | p) $\cos x = -2$ |
| r) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | s) $\operatorname{tg} x = 1$ | t) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ | u) $\operatorname{tg} x = 0$ |
| w) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ | y) $\operatorname{tg} x = -2$ | z) $\sin x = -\frac{1}{2}$ | |

Zad. 2

Rozwiąż równania:

- | | | | |
|---------------------------------------|--|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\sin x = \frac{1}{2}$ | b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | c) $\sin x = 0$ | d) $\sin x = 1$ |
| e) $\cos x = \frac{1}{2}$ | f) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | g) $\cos x = 0$ | h) $\cos x = -1$ |
| i) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ | j) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ | k) $\operatorname{tg} x = 0$ | l) $\operatorname{tg} x = -1$ |
| m) $\sin 3x = 0$ | n) $\cos 7x = -1$ | o) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ | p) $\sin(2x - \pi) = \frac{1}{2}$ |
| r) $\cos(\pi - x) = 1$ | s) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + 3\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | t) $2\sin x = \sqrt{2}$ | u) $\sqrt{2}\cos 3x = -1$ |
| w) $4\operatorname{tg}(\pi - 2x) = 0$ | | | |

Zad. 3

Rozwiąż równania:

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ | b) $\sin x + \cos^2 x + 1 = 0$ | c) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$ |
| d) $2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0$ | e) $\cos x - \cos 2x = 1$ | |

Zad. 4

Rozwiąż równania i nierówności: a) $|\sin x| = \frac{1}{2}$ b) $|\cos x| = 1$

Zad. 5

Dane jest równanie $\sin x = a^2 + 1$, z niewiadomą x . Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których dane równanie nie ma rozwiązań.

Zad. 6

Rozwiąż równania i nierówności w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

a) $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$

b) $\sin^2 2x - 4 \sin^2 x + 1 = 0$

c) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

d) $2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$

e) $2 \operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1 = 2 \cos x + \operatorname{tg} x$

Zad. 7

Rozwiąż równanie $\cos x + \cos 2x = 0$ dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Zad. 8

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3 \cos x$.

Zad. 9

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.

Zad. 10

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in \mathbf{R}$ jest parametrem.

a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.

Zad. 11

Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$.

Odpowiedzi

Zad. 1

- a) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) 1 e) $0, \pi, 2\pi$ f) $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ g) $\frac{3\pi}{2}$ h) 4,07 rad; 5,35 rad i) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ j) $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
k) $0, 2\pi$ l) 1,15 rad; 5,13 rad m) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ n) $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ o) π p) -1 r) $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ s) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ t) $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
u) $0, \pi, 2\pi$ w) $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ y) 2,03 rad; 5,17 rad z) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

Zad. 2

- a) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ b) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ c) $k\pi, k \in \mathbf{C}$ d) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$
e) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ f) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ g) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C}$ h) $\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$
i) $\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{C}$ j) $-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{C}$ k) $k\pi, k \in \mathbf{C}$ l) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{C}$ m) $\frac{1}{3}k\pi, k \in \mathbf{C}$ n) $\frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi, k \in \mathbf{C}$
o) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{C}$ p) $\frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{C}$ r) $\pi - 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ s) $-6\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$
t) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ u) $-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{C}$ w) $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{C}$

Zad. 3

- a) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ b) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ c) $\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{C}$ d) $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$ e) $\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$

Zad. 4

- a) $\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{C}$ b) $k\pi, k \in \mathbf{C}$

Zad. 5

- $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Zad. 6

- a) $\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2}\pi$ b) $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi$ c) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ d) $0, 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}$

Zad. 7

- $-\pi, \pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

Zad. 8

- $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi, k \in \mathbf{C}$

Zad. 9

- $\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{C}$

Zad. 10

- a) $0, \frac{\pi}{2}, 1, 5\pi$ b) $p \in (-2, 0)$

Zad. 11

- $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{C}$