Egzamin maturalny z matematyki (maj 2019)
Poziom Rozszerzony

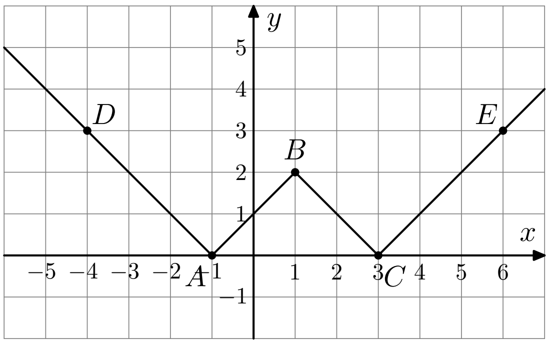
Zad. 1 (1 pkt)
Dla dowolnych liczb $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ wartość wyrażenia $\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{y}} x\right)$ jest równa

A. $x \cdot y$ **B.** $\frac{1}{x \cdot y}$ **C.** -1 **D.** 1

Zad. 2 (1 pkt)
Liczba $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zad. 3 (1 pkt)
Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = f(x)$, który jest złożony z dwóch półprostych AD i CE oraz dwóch odcinków AB i BC, gdzie $A = (-1, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, 0)$, $D = (-4, 3)$, $E = (6, 3)$.



Wzór funkcji f to

A. $f(x) = |x+1| + |x-1|$ **B.** $f(x) = ||x-1| - 2|$ **C.** $f(x) = ||x-1| + 2|$ **D.** $f(x) = |x-1| + 2$

Zad. 4 (1 pkt)
Zdarzenia losowe A i B zawarte w Ω są takie, że prawdopodobieństwo $P(B')$ zdarzenia B', przeciwnego do zdarzenia B, jest równe $\frac{1}{4}$. Ponadto prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Wynika stąd, że

A. $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ **B.** $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$ **C.** $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$ **D.** $P(A \cap B) = \frac{4}{5}$

Zad. 5 (2 pkt)
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9n^3 + 11n^2}{7n^3 + 5n^2 + 3n + 1} - \frac{n^2}{3n^2 + 1} \right)$$

Wpisz w poniższe kratki - od lewej do prawej - trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zad. 6 (3 pkt)
Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr $1, 3, 5, 7, 9$, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

Zad. 7 (2 pkt)
Punkt $P = (10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P. Oblicz współczynnik b.

Zad. 8 (3 pkt)
Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$.

Zad. 9 (3 pkt)
Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N, w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T. Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

Zad. 10 (4 pkt)
Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16$, $|AD| = 6$, $|CD| = 14$ i $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Zad. 11 (6 pkt)
Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

Zad. 12 (6 pkt)
Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

Zad. 13 (6 pkt)
Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leqslant 0$.

Zad. 14 (4 pkt)
Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$.

Zad. 15 (7 pkt)
Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

Odpowiedzi

Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	Zad. 6	Zad. 7	Zad. 8	Zad. 9
D	A	B	C	952	6666600	$b = 2019$	-	-

Zad. 10	Zad. 11	Zad. 12	Zad. 13
120	$6+6\sqrt{3},\ 6-6\sqrt{3},\ 6$	$q=\frac{1}{3}$	$m=1$ $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, 2\right\rangle$

Zad. 14

$x \in \left\{k\pi,\ \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$, dla $k \in C$

Zad. 15

Podstawa: $a = 2$

Wysokość: $H = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$P = 6\sqrt{3}$